- Chimie -

Partie I :

1- Etude de l'hydrolyse d'un ester :

1-1-1- * Formule semi-développée de l'ester E :

$$CH_3-CH_2-C\begin{matrix}\nearrow O \\ \searrow O-CH_2-CH_3\end{matrix}$$

*** Son nom :** propanoate d'éthyle

1-1-2- Détermination de la masse de l'acide formé à l'équilibre chimique :

- La constante de l'équilibre est : $K=\dfrac{[acide]_{éq}\times[alcool]_{éq}}{[ester]_{éq}\times[eau]_{éq}}$ $\quad avec\ [X]=\dfrac{n(X)}{V_{sol}}$

- En se servant du tableau d'avancement de l'hydrolyse :

Equation de la réaction		$C_2H_5COOC_2H_5\ +\ H_2O$	$\rightleftarrows$	C_2H_5COOH	$+C_2H_5OH$
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$0,1$	$0,1$	0	0
Etat intermédiaire	X	$0,1-x$	$0,1-x$	x	x
Etat équivalence	$x_{éq}$	$0,1-x_{éq}$	$0,1-x_{éq}$	$x_{éq}$	$x_{éq}$

On écrit : $K=\dfrac{x_{éq}{}^2}{(0,1-x_{éq})^2}$; on obtient : $x_{éq}=\dfrac{0,1\times\sqrt{K}}{\sqrt{K}-1}$ ou $x_{éq}=\dfrac{0,1\times\sqrt{K}}{\sqrt{K}+1}$ $(avec\ 0<x_{éq}<0,1mol)$

On retient la solution convenable : $x_{éq}=\dfrac{0,1\times\sqrt{K}}{\sqrt{K}+1}=\dfrac{0,1\times\sqrt{0,25}}{\sqrt{0,25}+1}\approx 0,033mol$

- La masse de l'acide formé à l'équilibre est : $m=x_{éq}.M(C_2H_5COOH)\approx 0,333\times 74\approx \underline{2,44g}$

1-2-1- Equation de la réaction : $C_2H_5COOC_2H_5\ +\ HO^-\ \rightleftarrows C_2H_5COO^-+C_2H_5OH$

1-2-2- Rendement de cette réaction :

$$r=\frac{n_{exp}(alcool)}{n_{théorique}(alcool)}=\frac{\dfrac{m_{exp}}{M(C_2H_5OH)}}{\dfrac{m_0}{M(E)}}$$, ou bien : $\underline{r=\dfrac{m_{exp}}{m_0}\times\dfrac{M(E)}{M(C_2H_5OH)}}$ **A.N :** $r=\dfrac{4,2}{10,2}\times\dfrac{102}{46}=\underline{0,91=91\%}$

2- Etude d'une solution d'acide propanoïque :

2-1-1- Equation chimique de la réaction entre l'acide propanoïque et l'eau :

$$C_2H_5COOH_{(aq)}\ +\ H_2O_{(\ell)}\rightleftarrows C_2H_5COO^-{}_{(aq)}+H_3O^+{}_{(aq)}$$

2-1-2- Expression du pK_A :

D'après le cours on a la relation suivante : $\underline{pH=pK_A+\log\left(\dfrac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right)}$.

2-1-3-Taux d'avancement final τ : On a : $\tau=\dfrac{x_f}{x_m}=\dfrac{[H_3O^+]}{C}$; ou bien

$$\tau=\frac{[H_3O^+]}{[C_2H_5COOH]+[C_2H_5COO^-]}=\frac{[H_3O^+]}{[C_2H_5COOH]+[H_3O^+]}=\frac{1}{1+\frac{[C_2H_5COOH]}{[H_3O^+]}}\quad(*)$$

m.k1957@hotmail.com

Or d'après le résultat : $pH = pK_A + \log\left(\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right)$; $alors : \frac{[C_2H_5COOH]}{[C_2H_5COO^-]} = 10^{pK_A - pH}$ (**)

On remplace (**) dans (*), on aura l'expression : $\tau = \frac{1}{1+10^{pK_A - pH}}$

A.N : $\tau = \frac{1}{1+10^{4,9-2,9}} \approx 9,9.10^{-3} \approx 1\%$

2-2-1- Equation chimique de la réaction du dosage :

$$C_2H_5COOH_{(\ell)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow C_2H_5COO^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$$

2-2-2-Recherche de l'expression du rapport : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}$

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$C_2H_5COOH_{(\ell)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow C_2H_5COO^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$			
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C_A.V_A$	$C_B.V_B$	0	0
Etat intermédiaire	x	$C_A.V_A - x$	$C_B.V_B - x$	x	x
Etat équivalence	x_E	$C_A.V_A - x_E$	$C_B.V_{B,E} - x_E$	x_E	x_E

- Avant l'équivalence $V_B < V_{B,E}$, le réactif limitant est $HO^-_{(aq)}$: $n(HO^-) = C_BV_B - x = 0 \Rightarrow x = C_BV_B$

- D'après le tableau : $[C_2H_5COO^-] = \frac{x}{V_A + V_B}$ et $[C_2H_5COOH] = \frac{C_AV_A - x}{V_A + V_B}$

Et le rapport s'écrira : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = \frac{C_BV_B}{C_AV_A - C_BV_B}$

Or au point d'équivalence, la relation qui se réalise est : $C_AV_A = C_BV_{B,E}$

- L'expression finale est : $\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]} = \frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}$

2-2-2- Vérification du pK_A du couple $C_2H_5COOH / C_2H_5COO^-$:

- La fonction $pH = \log\left(\frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}\right)$ est affine d'équation $pH = a.\log\left(\frac{V_B}{V_{B,E} - V_B}\right) + b$ (1)

Où b représente l'ordonnée à l'origine, et graphiquement il vaut : $b \approx 4,9$

- En comparant la relation (1) avec celle donnée à la réponse de la question 2-1-2-

$pH = \log\left(\frac{[C_2H_5COO^-]}{[C_2H_5COOH]}\right) + pK_A$; On déduit alors $pK_A \approx 4,9$

Partie II :

1- Le bon choix est : b) Le pole positif de la pile est l'électrode de l'argent.

- Le quotient de réaction initial : $Q_{r,i} = \frac{[Cd^{2+}]_i}{[Ag^+]_i^2} = \frac{0,2}{0,4^2} = 1,25 << K = 5.10^{40}$

- Le sens de la réaction spontanée est le sens direct $\overset{(1)}{\rightarrow}$; donc il y aura oxydation du cadmium Cd qui est l'électrode anode ou pole négatif de cette pile.

2-1- Expression du quotient de la réaction :

$$Q_r = \frac{[Cd^{2+}]_{(t)}}{[Ag^+]_{(t)}^2} = \frac{\frac{C_2.V + x}{V}}{\left(\frac{C_1.V - 2.x}{V}\right)^2} = \frac{C_2.V^2 + V.x}{(C_1.V - 2.x)^2}$$

A.N : $\underline{Q_r = \frac{1{,}25.10^{-2} + 0{,}25.x}{(0{,}1 - 2.x)^2}}$

2-2- Calcul du quotient de la réaction à t = 10h :

- Tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$2Ag^+_{(aq)} + Cd_{(s)} \rightleftarrows 2.Ag_{(s)} + Cd^{2+}_{(aq)}$				Quantité de matière des e^- échangés :
Etats du système	Avancement x (mol)	Quantités de matière (mol)				
E. Initial	0	$C_1.V$	$n_i(Cd)$	$n_i(Ag)$	$C_2.V$	0
E. Intermédiaire	x	$C_1.V - 2.x$	$n_i(Cd) - x$	$n_i(Ag) + 2.x$	$C_2.V + x$	$n(e^-) = 2.x$
E. Final	x_{max}	$C_1.V - 2.x_m$	$n_i(Cd) - x_m$	$n_i(Ag) + 2.x_m$	$C_2.V + x_m$	$n(e^-) = 2.x_m$

- Cherchons l'avancement x à cet instant :
On a la quantité d'électricité Q transportée pendant Δt, par les porteurs de charges (les électrons dans le circuit extérieur de la pile) est : $Q = n(e^-).F = I.\Delta t$ avec $n(e^-) = 2.x$ d'où :

$$x = \frac{I.\Delta t}{2.F} \overset{A.N}{=} \frac{0{,}215 \times 10 \times 3600}{2 \times 9{,}65.10^4} \approx 0{,}04 mo\ell$$

- A.N : $Q_r = \frac{1{,}25.10^{-2} + 0{,}25 \times 0{,}04}{(0{,}1 - 2 \times 0{,}04)^2} \approx \underline{56{,}25}$

2-3- Calcul de la variation $|\Delta m|$:

- Quand la pile sera usée, les ions Ag^+ disparaissent totalement (Cd est en excès) :

$n_f(Ag^+) = C_1.V - 2.x_m = 0$; c.à.d $x_m = \frac{C_1.V}{2}$

- La variation de masse : $|\Delta m| = |\Delta n(Cd)| \times M(Cd)$ ou bien $|\Delta m| = |n_f(Cd) - n_i(Cd)| \times M(Cd)$

Ce qui donne $|\Delta m| = |(n_i(Cd) - x_m) - n_i(Cd)| \times M(Cd) = x_m \times M(Cd)$

Finalement : $\underline{|\Delta m| = \frac{C_1.V}{2} \times M(Cd)}$ A.N : $|\Delta m| = \frac{0{,}4 \times 0{,}25}{2} \times 112{,}4 = \underline{5{,}62 g}$

- Physique -

LES TRANSFORMATIONS NUCLEAIRES :

1- Le bon choix est : c) D'après la courbe d'Aston, pour les noyaux lourds, le degré de stabilisation diminue lorsque la masse du noyau augmente.

2-Définition : La radioactivité β^- est une réaction spontanée au cours de laquelle un noyau instable se désintègre en un nouveau noyau plus stable, en émettant des électrons (notés β^-).

3- Calcul de l'énergie libérée $|\Delta E|$:

L'équation de désintégration est : ${}^{60}_{27}Co \rightarrow {}^{60}_{28}X + {}^{0}_{-1}e$

On a : $|\Delta E| = \left| E_\ell({}^{60}_{27}Co) - E_\ell({}^{60}_{28}X) \right|$; or $E_\ell({}^{60}_{27}Co) = \left(27.m({}^1_1p) + (60-27).m({}^1_0n) - m({}^{60}_{27}Co)\right)c^2 \quad (2)$

De la relation (2), on calcule d'abord $E_\ell({}^{60}_{27}Co)$:

$E_\ell({}^{60}_{27}Co) = (27\times 1{,}00728 + 33\times 1{,}00866 - 59{,}8523).u\times c^2 \approx 0{,}63\times 931{,}949\,MeV \approx 586{,}841 MeV$

A.N : $|\Delta E| = |\,586{,}841 - 588{,}387| \approx \underline{1{,}55 MeV}$

4- Montrons la relation $t_1 = \tau.\ln\left(\dfrac{N_A.m_0}{\tau.M.a_1}\right)$:

- On sait que, d'après la loi de désintégration, l'activité : $a(t_1) = a_0.e^{-\lambda.t_1}$ avec $a_0 = \lambda.N_0 = \lambda.N_A.\dfrac{m_0}{M}$

On combine ces relations, on obtient : $a_1 = \dfrac{\lambda.N_A.m_0}{M}.e^{-\lambda.t_1}$ ou bien $\dfrac{M.a_1}{\lambda.N_A.m_0} = e^{-\lambda.t_1}$

Sachant que $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$; donc : $\dfrac{\tau.M.a_1}{N_A.m_0} = e^{-t_1/\tau}$ alors $\ln\left(e^{t_1/\tau}\right) = \ln\left(\dfrac{N_A.m_0}{\tau.M.a_1}\right)$

Finalement : $\underline{t_1 = \tau.\ln\left(\dfrac{N_A.m_0}{\tau.M.a_1}\right)}$ A.N : $t_1 = \dfrac{2{,}8.10^3}{365{,}25}\times\ln\left(\dfrac{6{,}02.10^{23}\times 50.10^{-3}}{2{,}8.10^3\times 24\times 3600\times 60\times 5{,}18.10^{11}}\right) \approx \underline{10{,}63 ans}$

L'ELECTRICITE :

I – La Charge et la décharge d'un condensateur :

1- Charge d'un condensateur :

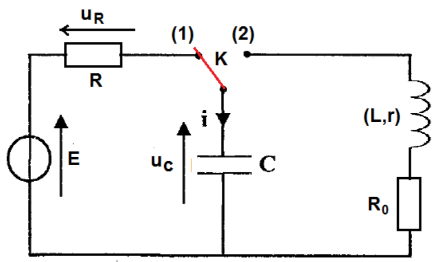


figure1

1-1- Equation différentielle que vérifie l'intensité i(t) :

D'après la figure ci-contre : $u_R + u_C = E \quad (1)$

En respectant les conventions : $u_C = \dfrac{q}{C}$ et $u_R = R.i$

La relation (1) devient : $R.i + \dfrac{q}{C} = E \quad (2)$ et $E = Cte$

En dérivant la relation (2), on aura : $R.\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{C}.\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dE}{dt} = 0$ avec $i = \dfrac{dq}{dt}$

Finalement l'équation différentielle : $\underline{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{RC}.i = 0}$

1-2- Détermination de R :

- Graphiquement la constante du temps est : $\tau = 1ms = 10^{-3}s$

- La constante du temps $\tau = RC$ donne : $\underline{R = \dfrac{\tau}{C}}$ A.N : $R = \dfrac{10^{-3}}{2{,}5.10^{-6}} = \underline{400\Omega}$

1-3- Détermination de U_0 :

- A t = 0 ; graphiquement : i(0) = 10mA=10^{-2}A
- A t = 0 ; l'équation différentielle devient: $u_R(0) + u_C(0) = E$; qui peut s'écrire : $R.i(0) + U_0 = E$

D'où : $\underline{U_0 = E - R.i(0)}$ A.N : $U_0 = 8 - 400\times 10^{-2} = \underline{4V}$

1-4- * Recherche de l'expression de l'énergie électrique emmagasinée entre t =0 et t∞:

On a : $E_{e\ell} = E_{e\ell}(t \to \infty) - E_{e\ell}(t=0) = \frac{1}{2}.C.\Big(\underbrace{u_c(t_\infty)}_{=E}\Big)^2 - \frac{1}{2}.C.U_0^2$ ce qui donne : $E_{e\ell} = \frac{1}{2}.C.(E^2 - U_0^2)$

A.N : $E_{e\ell} = \frac{1}{2} \times 2{,}5.10^{-6} \times (8^2 - 4^2) = 6.10^{-5}\,J = 60\mu J$

2- Oscillations libres dans le circuit RLC :

2-1- Recherche de l'expression de l'énergie magnétique $E_m(t)$:

Soit une bobine de coefficient d'auto-inductance L, traversée par un courant d'intensité i(t) à l'instant t, et la tension entre ses bornes est $u_L(t)$: la puissance instantanée est alors : p(t) = u(t) . i(t)

Dans la convention " récepteur " la tension s'écrit : $u_L(t) = L.\frac{d\,i(t)}{dt}$

Donc $p(t) = L.\frac{d\,i(t)}{dt} \times i(t) = \frac{L}{2}.\frac{d}{dt}\left(i^2(t)\right)$ ou bien $p(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.L.i^2(t)\right)$ (1)

En comparant la relation (1) avec la relation suivante : $p(t) = \frac{d}{dt}(E_m(t))$

On en déduit : $E_m(t) = \frac{1}{2}.L.i^2(t)$

2-2- Recherche de l'expression $\frac{d}{dt}(E_{Tot}(t))$:

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC est : $E_{Tot}(t) = E_{e\ell}(t) + E_m(t)$

Ou bien $E_{Tot}(t) = \frac{1}{2}.C.u_c^2(t) + \frac{1}{2}.L.i^2(t)$

- Dérivons cette expression $\frac{d}{dt}(E_{Tot}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2(t) + \frac{1}{2}.L.i^2(t)\right) = C.u_c(t).\frac{du_c(t)}{dt} + L.\,i(t).\frac{d\,i(t)}{dt}$

Or $u_c = \frac{q}{C}$ et $\frac{d\,u_c}{dt} = \frac{1}{C}.\frac{d\,q}{dt} = \frac{i}{C}$ donc $\frac{d}{dt}(E_{Tot}(t)) = q(t).\frac{i(t)}{C} + L.\,i(t).\frac{d\,i(t)}{dt} = i(t).\left(\frac{q(t)}{C} + L.\frac{d\,i(t)}{dt}\right)$ (*)

Et d'après la loi d'additivité des tensions :

$u_c + u_b + u_{R_0} = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + r.i(t) + L.\frac{d\,i(t)}{dt} + R_0.i(t) = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L.\frac{d\,i(t)}{dt} = -(r+R_0).i(t)$

On remplace cette dernière expression dans la relation (*) : $\frac{d}{dt}(E_{Tot}(t)) = i(t).[-(r+R_0).i(t)]$

Finalement on aboutit à l'expression finale : $\frac{d\,E_{Tot}(t)}{dt} = -(r+R_0).i^2(t)$

2-3- Détermination de l'énergie dissipée $|\Delta E|$ entre t=0 et t=t_1 :

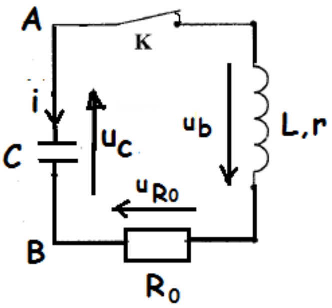
- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à t = 0 est :

$$E_{Tot}(0) = \frac{1}{2}.C.\Big(\underbrace{u_c(0)}_{=E}\Big)^2 + \frac{1}{2}.L.\Big(\underbrace{i(0)}_{=0}\Big)^2 \Rightarrow E_{Tot}(0) = \frac{1}{2}.C.E^2$$

- L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC à t = t_1 est :

$$E_{Tot}(t_1) = \frac{1}{2}.C.u_c^2(t_1) + \frac{1}{2}.L.i^2(t_1) \quad (*)$$

- D'après la loi d'ohm : $u_{R_0}(t_1)=R_0.i(t_1)\Rightarrow i(t_1)=\dfrac{u_{R_0}(t_1)}{R_0}$ (1)



- D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_c+u_b+u_{R_0}=0 \Rightarrow u_c(t_1)+r.i(t_1)+L.\underbrace{\left(\frac{d\,i(t)}{dt}\right)_{t=t_1}}_{=0}+u_{R_0}(t_1)=0$$

$$\Rightarrow u_c(t_1)=-r.\frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0}-u_{R_0}(t_1)\Rightarrow u_c(t_1)=-\left(\frac{r+R_0}{R_0}\right).u_{R_0}(t_1)\ \ (2)$$

- On remplace (1) et (2) dans (*), on obtient :

$$E_{Tot}(t_1)=\frac{1}{2}.C.\left(-\left(\frac{r+R_0}{R_0}\right).u_{R_0}(t_1)\right)^2+\frac{1}{2}.L.\left(\frac{u_{R_0}(t_1)}{R_0}\right)^2\Rightarrow E_{Tot}(t_1)=\frac{(u_{R_0}(t_1))^2}{2.R_0^{\,2}}.\left(L+C.(r+R_0)^2\right)$$

- Alors l'énergie dissipée $|\Delta E|$ entre t=0 et t=t_1 : $|\Delta E|=|E_{Tot}(t_1)-E_{Tot}(t=0)|$

$$|\Delta E|=\left|\frac{(u_{R_0}(t_1))^2}{2.R_0^{\,2}}.\left(L+C.(r+R_0)^2\right)-\frac{1}{2}.C.E^2\right|\Rightarrow \underline{|\Delta E|=\frac{1}{2}.\left|\frac{u_{R_0}^{\,2}}{R_0^{\,2}}.\left(L+C.(r+R_0)^2\right)-C.E^2\right|}$$

A.N : $|\Delta E|=\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{0{,}44^2}{30^2}\times\left(0{,}5+2{,}5.10^{-6}\times(7+30)^2\right)-2{,}5.10^{-6}\times 8^2\right|\approx \underline{2{,}59.10^{-5}\,J}\approx\underline{26\mu J}$

II - Oscillations forcées dans le circuit RLC :

1- Le bon choix est : d) Expression du facteur de qualité $Q=\dfrac{N_0}{\Delta N}$

a) Le GBF joue le rôle de l'excitateur, b) les oscillations étudiées sont forcées, et
c) φ représente le déphasage entre la tension u(t) et l'intensité du courant électrique i(t).

2- Détermination de la valeur de U_m, L_0 et r_0 :

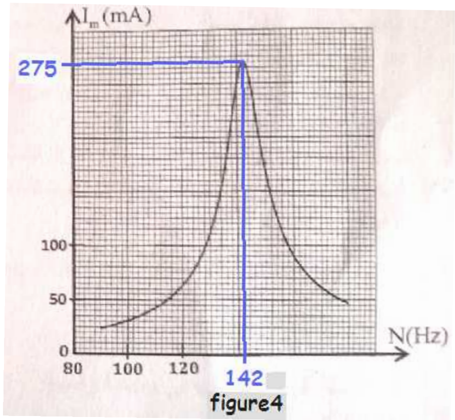


figure4

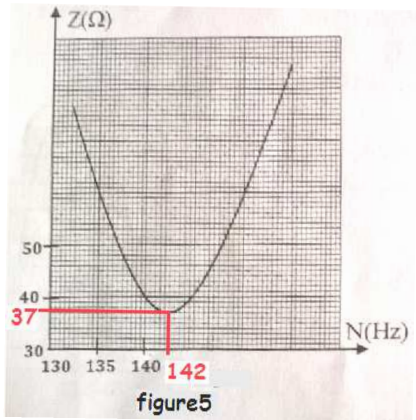


figure5

- Figure5 : à la résonance Z = 37Ω, et on sait que Z = R_{Tot} = r_0 + R_0

D'où : $\underline{r_0 = Z - R_0}$ A.N : r_0 = 37 – 30 $\underline{= 7\Omega}$

- Figure4 : à la résonance I_m = 275mA et N_0 = 142Hz

* On sait que $\underline{U_m = Z\,.\,I_m}$ A.N : U_m = 37×0.275 $\underline{\approx 10V}$

* On sait que $L_0.C.(2.\pi.N_0)^2=1$ d'où $\underline{L_0=\dfrac{1}{4.\pi^2N_0^2.C}}$ A.N : $L_0=\dfrac{1}{4\times10\times142^2\times2{,}5.10^{-6}}\approx\underline{0{,}5H}$

3- Détermination de la puissance électrique moyenne consommée à la résonance :

A la résonance : P = $R_{Tot}.I^2$ c'est la puissance consommée par les résistances du circuit.

Or $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ donc $P=\frac{1}{2}.(r_0+R_0).I_m^{\,2}$ A.N : $P=\frac{1}{2}.(7+30).0,275^2\approx 1,4W$

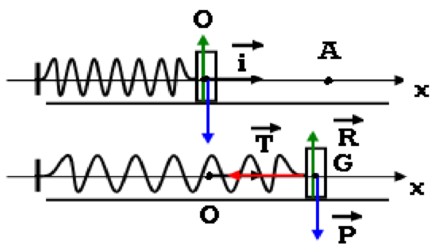
LA MECANIQUE :

PARTIE I : Etude du mouvement d'un oscillateur (corps solide – ressort)

1- Etude du mouvement de l'oscillateur mécanique en position horizontale :

1-1- Equation différentielle du mouvement que vérifie l'abscisse x(t) :

- Système à étudier : {corps(S)}
- Repère d'étude R (O ; $\vec{i}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :



* Poids du corps (S) : $\vec{P}$;

* Action du plan horizontal : $\vec{R}$

* Action du ressort : $\vec{T}$

- La 2ème loi de newton donne : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m.\vec{a_G}$
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox : $P_x+R_x+R_x=m.a_x$ (*)
- Expressions : $P_x=0$, $R_x=0$, $T_x=-T=-k.x$ et $a_x=\frac{d^2x}{dt^2}$.
- La relation (*) devient : $0+0-k.x=m.\frac{d^2x}{dt^2}$
- Finalement l'équation différentielle sera : $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}.x=0$

1-2- Détermination de x_m et φ :

* Détermination de x_m :

- La solution de l'équation différentielle est de la forme : $x=x_m\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t+\varphi)$
- Graphiquement (figure2) : $a_{max}=5m.s^{-2}$ et $T_0=0,4s$
- En dérivant successivement deux fois cette solution, on obtient l'expression de l'accélération de G le centre d'inertie du corps (S) :

$a_x(t)=-\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.x_m\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t+\varphi)$ ou bien $a_x(t)=\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.x_m\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t+\varphi+\pi)=a_{max}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t+\varphi+\pi)$

Avec $a_{max}=\left(\frac{2.\pi}{T_0}\right)^2.x_m$ alors $x_m=\frac{a_{max}.T_0^{\,2}}{4.\pi^2}$ A.N : $x_m=\frac{5\times 0,4^2}{4\times 10}=0,02m=2cm$

* Détermination de φ :

A t=0 : graphiquement $a_x(0)=-a_{max}$ et $a_x(0)=a_{max}.\cos(\varphi+\pi)$ alors $\cos(\varphi+\pi)=-1$

ou bien $-\cos(\varphi)=-1 \Rightarrow \cos(\varphi)=1$; finalement : $\varphi=0$

2- Etude du mouvement de l'oscillateur mécanique en position verticale :

2-1- Détermination de l'allongement $\Delta\ell_0 = \ell - \ell_0$:

A l'équilibre : $\vec{T}_0 + \vec{P} = \vec{0}$, et par projection sur l'axe vertical Oz, on aura :

$T_{0z} + P = 0$ alors $k.\Delta\ell_0 + m.g = 0$ d'où $\Delta\ell_0 = -\dfrac{m.g}{k}$

2-2- Montrons que $E_p = A.z^2 + B$

- L'énergie potentielle totale est : $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ (*)
- L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = -m.g.z + C$

Or en $z = 0$ on a $E_{pp} = 0$ donc C = 0 ; d'où $E_{pp} = -m.g.z$ (1)

- L'énergie potentielle élastique est : $E_{pe} = \dfrac{1}{2}.k.\Delta\ell^2 + C'$

Or lorsque $\Delta\ell = 0$ on a $E_{pe} = 0$ donc C' = 0 ; d'où $E_{pe} = \dfrac{1}{2}.k.\Delta\ell^2$ (2)

- On porte (1) et (2) dans (*), on aura :

$E_p = -m.g.z + \dfrac{1}{2}.k.\Delta\ell^2$, avec $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ et $z = \ell_{éq} - \ell$

On peut écrire : $\Delta\ell = \ell - \ell_0 = (\ell - \ell_{éq}) + (\ell_{éq} - \ell_0) = -z + \Delta\ell_0$

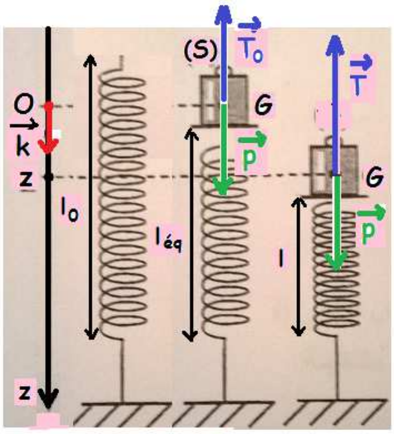


figure3

Donc $E_p = -m.g.z + \dfrac{1}{2}.k.(-z + \Delta\ell_0)^2 = -\underbrace{(m.g + k.\Delta\ell_0)}_{=0}.z + \dfrac{1}{2}.k.z^2 + \dfrac{1}{2}.k.(\Delta\ell_0)^2$

Finalement on aboutit à l'expression : $E_p = \overbrace{\dfrac{1}{2}}^{A}.k.z^2 + \overbrace{\dfrac{1}{2}.k.(\Delta\ell_0)^2}^{B}$

2-3-1- Déterminons k et $\Delta\ell_0$:

- La figure4 nous permet d'avoir : $Ep(z = 0) = 40mJ$ et $Ep(z = 2cm) = 50mJ$

- soit le système : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}.k.(\Delta\ell_0)^2 = E_p(z=0) & (1) \\ \dfrac{1}{2}.k.z_m^2 + \dfrac{1}{2}.k.(\Delta\ell_0)^2 = E_p(z_m = 2cm) & (2) \end{cases}$

- Des relations (1) et (2) on peut écrire : $\dfrac{1}{2}.k.z_m^2 = E_p(z_m = 2cm) - E_p(z = 0)$

Donc : $k = \dfrac{2}{z_m^2} \times [E_p(z_m = 2cm) - E_p(z = 0)]$ A.N : $k = \dfrac{2}{0,02^2} \times [50.10^{-3} - 40.10^{-3}] = 50N.m^{-1}$

- De la relation (1) : $\dfrac{1}{2}.k.(\Delta\ell_0)^2 = E_p(z = 0)$ on déduit $\Delta\ell_0 = -\sqrt{\dfrac{2.E_p(z=0)}{k}}$

A.N : $\Delta\ell_0 = -\sqrt{\dfrac{2 \times 40.10^{-3}}{50}} = -0,04m = -4cm$

2-3-2- Détermination du travail de la force de rappel :

On a $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ alors $\Delta E_p = \Delta E_{pp} + \Delta E_{pe}$ or $\Delta E_{pp} = -W_{z_1 \to z_2}(\vec{P}) = -m.g.(z_2 - z_1)$ et $\Delta E_{pe} = -W_{z_1 \to z_2}(\vec{T})$

Donc $\Delta E_p = -m.g.(z_2 - z_1) - \underset{z_1 \to z_2}{W}(\vec{T})$ d'où $\underset{z_1 \to z_2}{W}(\vec{T}) = -\Delta E_p - m.g.(z_2 - z_1)$ or $-m.g = k.\Delta\ell_0$

Finalement on arrive à l'expression : $\underline{\underset{z_1 \to z_2}{W}(\vec{T}) = -\Delta E_p + k.\Delta\ell_0.(z_2 - z_1)}$

A.N : $\underset{z_1 \to z_2}{W}(\vec{T}) = -(50-45).10^{-3} + 50\times(-4.10^{-2})\times(1,4.10^{-2} - 0) = \underline{-3,3.10^{-2}\,J}$

PARTIE II : Détermination du rayon de l'orbite de la lune autour de la terre

1- Définition :

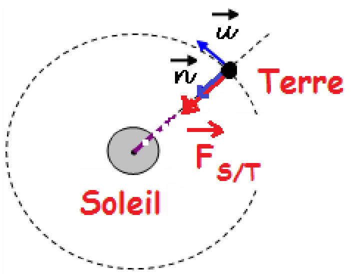
Le référentiel géocentrique est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui apparaissent fixes.

2- Le bon choix est : d) La vitesse d'une planète autour du soleil ne dépond pas de la masse de cette planète.

(a) Unité de la constante gravitationnelle $N.m^2.kg^{-2}$; b) Le vecteur accélération est radial mais non tangentiel ; c) Le vecteur accélération change de direction durant le mouvement circulaire uniforme).

3- Expression vectorielle de la force de gravitation :

Dans $(\vec{u};\vec{n})$ on a : $\underline{\vec{F}_{S/T} = G.\frac{m.M}{R^2}.\vec{n}}$



4- Le mouvement de la terre est circulaire uniforme :

- Système à étudier : {Terre (m)}
- Repère d'étude $(S, \vec{i}, \vec{j})$ supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures : $\vec{F}_{S/T}$
- La 2ème loi de newton s'écrit : $\vec{F}_{S/T} = m.\vec{a}_G$ ou bien $m.\vec{a}_G = G.\frac{M.m}{R^2}.\vec{n}$ alors $\vec{a}_G = G.\frac{M}{R^2}.\vec{n}$

Ce qui prouve que le vecteur accélération est radial, et que sa composante tangentielle est nulle, $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$: On en déduit que la vitesse est constante ou le mouvement est <u>uniforme</u>.

D'autre part $a_N = a_G \Rightarrow \frac{v^2}{R} = G.\frac{M}{R^2} \Rightarrow R = \frac{G.M}{v^2} = Cte$: On en déduit que le rayon est constant ou le mouvement est <u>circulaire</u>.

Finalement le mouvement de la terre par rapport au soleil est circulaire uniforme.

5- La troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{R^3} = K = Cte$

Puisque le mouvement de la Terre par rapport au Soleil est circulaire uniforme de période T ; alors : $T = \frac{2\pi R}{v}$ avec $v = \sqrt{\frac{G.M}{R}}$; ce qui donne $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{G.M}{R}}}$ ou $T^2 = 4\pi^2.\frac{R^3}{G.M}$

Finalement la loi de Kepler est : $\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{G.M}$ (1)

6- * Expression du rayon orbital de la lune :

- On applique la loi de Kepler, pour le mouvement de la Lune par rapport à la Terre qui est circulaire uniforme de période T' : $\frac{T'^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{G.m}$ (2)

- Des deux relations (1) et (2), on peut écrire : $\frac{T^2.M}{R^3}=\frac{4\pi^2}{G}=\frac{T'^2.m}{r^3}$

- On en déduit l'expression du rayon : $r=R.\sqrt[3]{\left(\frac{T'}{T}\right)^2.\frac{m}{M}}$

* Calcul du rayon orbital de la trajectoire de la lune :

$$r=1{,}49.10^8\times\sqrt[3]{\left(\frac{27{,}32}{365{,}25}\right)^2\times\frac{1}{3{,}35.10^5}}\approx 3{,}81.10^5\,km$$